Campi vettoriali e forme differenziali in $\mathbb{R}^3$

Prodotto vettoriale. Prendiamo due vettori (o campi vettoriali)

$$u = (a, b, c) \qquad \text{e} \qquad v = (A, B, C)$$

e consideriamo i corrispondenti 1-forme

$$\alpha = a\,dx + b\,dy + c\,dz \qquad \text{e} \qquad \beta = A\,dx + B\,dy + C\,dz.$$

Calcoliamo il prodotto esterno

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= \big(a\,dx + b\,dy + c\,dz\big) \wedge \big(A\,dx + B\,dy + C\,dz\big)\\ &= \big(bC - cB\big)\,dy \wedge dz\\ &\qquad + \big(cA - aC\big)\,dz \wedge dx\\ &\qquad\qquad + \big(aB - bA\big)\,dx \wedge dy\end{aligned}$$

Il vettore (campo vettoriale) di coordinate

$$\big(bC - cB\ \ cA - aC\,,\ aB - bA\big)$$

è precisamente il prodotto vettoriale $u \wedge v$.

Prodotto scalare. Prendiamo due vettori (o campi vettoriali)

$$u = (a, b, c) \qquad \text{e} \qquad v = (A, B, C)$$

e consideriamo la 1-forma

$$\alpha = a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

e la 2-forma

$$\beta = A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy.$$

Calcoliamo il prodotto esterno

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= \big(a\,dx + b\,dy + c\,dz\big) \wedge \big(A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy\big)\\ &= aA\,dx \wedge dy \wedge dz\\ &\qquad + bB\,dy \wedge dz \wedge dx\\ &\qquad\qquad + cC\,dz \wedge dx \wedge dy\\ &= (aA + bB + cC)\,dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Osserviamo che $aA + bB + cC$ è il solito prodotto scalare $u \cdot v$.

Prodotto misto. Consideriamo i tre vettori (o campi vettoriali)

$$u = (a_u, b_u, c_u)\,, \quad v = (a_v, b_v, c_v) \quad \text{e} \quad w = (a_w, b_w, c_w)$$

e consideriamo le 1-forme

$$\begin{aligned}\alpha &= a_u\,dx + b_u\,dy + c_u\,dz\\ \beta &= a_v\,dx + b_v\,dy + c_v\,dz\\ \gamma &= a_w\,dx + b_w\,dy + c_w\,dz\end{aligned}$$

Allora,

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma = \Big(\big(u \wedge v\big) \cdot w\Big)\,dx \wedge dy \wedge dz = \det \begin{pmatrix} a_u & a_v & a_w \\ b_u & b_v & b_w \\ c_u & c_v & c_w \end{pmatrix} dx \wedge dy \wedge dz.$$

Rotore. Consideriamo il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \Big(a(x,y,z),\ b(x,y,z),\ c(x,y,z)\Big)$$

e la 1-forma

$$\alpha = a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz$$

Allora

$$d\alpha = \big(\partial_y c - \partial_z b\big)\,dy\wedge dz + \big(\partial_z a - \partial_x c\big)\,dz\wedge dx + \big(\partial_x b - \partial_y a\big)\,dx\wedge dy\ .$$

Il campo

$$\mathrm{rot}\,F = \Big(\partial_y c - \partial_z b\,,\ \partial_z a - \partial_x c\,,\ \partial_x b - \partial_y a\Big) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

è detto rotore di F e viene indicato anche con $\vec{\nabla}\wedge F\ ,\quad \vec{\nabla}\times F\ ,\quad \nabla\wedge F\ ,\quad \nabla\times F\,.$

Un campo vettoriale F che ha rotore nullo si dice **campo irrotazionale**. Un campo F che è il gradiente di una funzione ϕ ($\nabla\phi = F$) si dice **campo conservativo**. Abbiamo già dimostrato il seguente teorema.

> **Teorema.** Un campo irrotazionale $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$, definito su un aperto semplicemente connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, è un campo conservativo.

Divergenza di un campo. Consideriamo il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \Big(a(x,y,z),\ b(x,y,z),\ c(x,y,z)\Big)$$

possiamo associare la 2-forma

$$\alpha = a(x,y,z)\,dy\wedge dz + b(x,y,z)\,dz\wedge dx + c(x,y,z)\,dy\wedge dz\,.$$

Allora

$$d\alpha = \mathrm{div}\,F(x,y,z)\,dx\wedge dy\wedge dz\,,$$

dove div$F$ è la divergenza del campo F, ovvero

$$\mathrm{div}\,F = \partial_x a + \partial_y b + \partial_z c,$$

che indichiamo anche con $\vec{\nabla}\cdot F$ oppure $\nabla\cdot F$. Un campo F che ha divergenza nulla si dice **campo solenoidale**. Se invece il campo F è il rotore di un campo diremo semplicemente che F è un **campo rotore**.

> **Teorema.** Un campo solenoidale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un campo rotore.

Due identità notevoli. Sia ϕ una funzione reale definta su un aperto $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Possiamo esprimere il fatto che $d\phi$ sia una 1-forma chiusa (ovvero che $d(d\phi) = 0$) in termini del rotore ed il gradiente nel modo seguente:

$$\boxed{\nabla\times\nabla\phi = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi) = 0}$$

Se invece $F = (a,b,c) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale definito su un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$ e se

$$\alpha = a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz$$

è la 1-forma corrispondente, allora il fatto che $d(d\alpha) = 0$ si traduce nell'identità seguente:

$$\boxed{\nabla\cdot(\nabla\times F) = \mathrm{div}\big(\mathrm{rot}\,F\big) = 0}$$

Equazioni di Maxwell. Consideriamo i seguenti campi vettoriali:

- il campo elettrico

$$E(x,y,z) = \Big(e_1(x,y,z),\ e_2(x,y,z),\ e_3(x,y,z)\Big)\ ;$$

- il campo magnetico

$$B(x,y,z) = \Big(b_1(x,y,z),\ b_2(x,y,z),\ b_3(x,y,z)\Big)\ ;$$

e le seguenti forme differenziali :

- la 1-forma
$$\varepsilon = e_1(x,y,z)\,dx + e_2(x,y,z)\,dy + e_3(x,y,z)\,dz\ ;$$
- la 2-forma
$$\beta = b_1(x,y,z)\,dy\wedge dz + b_2(x,y,z)\,dz\wedge dx + b_3(x,y,z)\,dx\wedge dy\ .$$

Le equazioni omogenee di Maxwell per il campo elettromagnetico sono:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot E &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \textbf{Legge di Gauss elettrica}\\ \nabla\cdot B &= 0 && \textbf{assenza di dipoli magnetici}\\ \nabla\times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} && \textbf{Legge di Faraday}\\ \nabla\times B &= \mu_0 J + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} && \textbf{Legge di Ampère-Maxwell} \end{aligned}$$

dove ε_0 e μ_0 sono costanti universali: ρ è una funzione che rappresenta la densità di carica elettrica; J è un campo vettoriale che rappresenta la densità di corrente elettrica. Nel caso statico, in cui i campi non dipendono dal tempo t, abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla\cdot E &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \textbf{Legge di Gauss elettrica}\\ \nabla\cdot B &= 0 && \textbf{assenza di dipoli magnetici}\\ \nabla\times E &= 0 && \textbf{Legge di Faraday}\\ \nabla\times B &= \mu_0 J && \textbf{Legge di Ampère-Maxwell} \end{aligned}$$

In particolare, l'assenza dei dipoli magnetici e la legge di Faraday si possono scrivere come

$$\begin{aligned} d\beta &= 0 && \textbf{assenza di dipoli magnetici}\\ d\varepsilon &= 0 && \textbf{Legge di Faraday} \end{aligned}$$

Potenziale magnetico. Le forma β è chiuse su $\mathbb{R}^3$ e quindi è anche esatta. Esistono quindi una 1-forma
$$\alpha = a_1(x,y,z)\,dx + a_2(x,y,z)\,dy + a_3(x,y,z)\,dz$$
associata al campo vettoriale
$$A = (a_1, a_2, a_3),$$
tale che
$$d\alpha = \beta,$$
o in termini dei campi A e B :
$$\nabla\times A = B.$$
Potenziale elettrico. Analogamente, anche la 1-forma ε è chiusa su $\mathbb{R}^3$. Esiste quindi una funzione
$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$
tale che
$$d\phi = \varepsilon$$
o in termini del campo E,
$$\nabla\phi = E.$$
Equazioni di Maxwell in termini di A e ϕ.

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(\nabla\phi) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \textbf{Legge di Gauss elettrica}\\ \nabla\times(\nabla\times A) &= \mu_0 J && \textbf{Legge di Ampère-Maxwell} \end{aligned}$$

Ora calcoliamo
$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = \mathrm{div}(\nabla\phi) = \partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi + \partial_z^2\phi = \Delta\phi.$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla \times \begin{pmatrix} \partial_y a_3 - \partial_z a_2 \\ \partial_z a_1 - \partial_x a_3 \\ \partial_x a_2 - \partial_y a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \Big[\partial_x a_2 - \partial_y a_1\Big] - \partial_z \Big[\partial_z a_1 - \partial_x a_3\Big] \\ \partial_z \Big[\partial_y a_3 - \partial_z a_2\Big] - \partial_x \Big[\partial_x a_2 - \partial_y a_1\Big] \\ \partial_x \Big[\partial_z a_1 - \partial_x a_3\Big] - \partial_y \Big[\partial_y a_3 - \partial_z a_2\Big] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\Delta a_1 + \partial_x \big[\mathrm{div} A\big] \\ -\Delta a_2 + \partial_y \big[\mathrm{div} A\big] \\ -\Delta a_3 + \partial_z \big[\mathrm{div} A\big] \end{pmatrix} = -\Delta A + \nabla\big(\mathrm{div} A\big),$$

che possiamo anche scrivere come

$$\nabla \times (\nabla A) = -\Delta A + \nabla(\nabla \cdot A),$$

dove stavolta il gradiente della funzione div$A$ è un vettore colonna. In conclusione, possiamo scrivere le equazioni (statiche) di Maxwell come

$$\Delta \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{e} \qquad -\Delta A + \nabla(\nabla \cdot A) = \mu_0 J.$$